10/1	**Exponentialfunktionen**

Der Graph der allgemeinen Exponentialfunktion f mit $f(x) = b \cdot a^x$, $x \in D_f = \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist von der Basis a abhängig.

Gib die Bedingung für a an und beschreibe, welche zwei prinzipiell unterschiedlichen Fälle man unterscheidet. Fertige für jeden Fall eine Skizze eines zugehörigen Graphen an.

10/2	**Exponentialfunktionen**

Der Graph der Exponentialfunktion f mit $f(x) = b \cdot a^x$ verläuft durch die Punkte P(0|6) und Q(1|2).

a) Bestimme die Variablen a und b rechnerisch.
b) Nun wird der Graph an der y-Achse gespiegelt. Wie lautet der neue Funktionsterm?

10/3	**Halbwertszeit**

In einer Zellkultur mit anfangs 200 Millionen Zellen sterben die Zellen mit einer Halbwertszeit von drei Tagen ab.

a) Stelle für diesen Sachverhalt die Funktionsgleichung für die Anzahl N der Zellen nach t Tagen auf.
b) Bestimme, wie viele Zellen nach fünf Tagen noch vorhanden sind.

10/4	**Logarithmus**

Gib die Definition von $log_b\ a$ an.

10/5	**Rechengesetze für Logarithmen**

Ergänze die Rechenregel.

$log_a(b^x) =$ ...

10/6	**Exponentialgleichung I**

Löse die Exponentialgleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

$$2{,}5 \cdot 3^x = 5 \cdot 2^x$$

10/7	**Exponentialgleichung II**

Löse die Exponentialgleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

$$8^x = 2^{4x+2}$$

10/8	**Lineares und exponentielles Wachstum**

Untersuche jeweils, ob die Tabelle zu einem linearen oder exponentiellen Wachstum gehört. Begründe deine Entscheidung.

Tabelle 1:

x	1	2	3	4
y	6,5	8	9,5	11

Tabelle 2:

x	1	2	3	4
y	2,5	1,25	0,625	0,313

Tabelle 3:

x	1	2	3	4
y	2,5	1,1	0,8	0,7

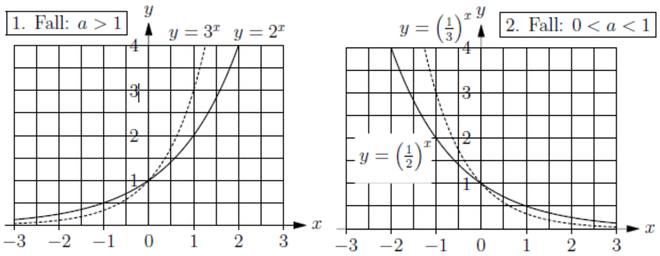
Lösung 10/2:

a) P(0|6) einsetzen: f(0) = 6
   $b\,a^0 = 6$
   b = 6
   Q(1|2) einsetzen: f(1) = 2
   $6\,a^1 = 2$
   $a = \frac{1}{3}$, also $f(x) = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x = 6 \cdot 3^{-x}$

b) Neue Funktion: $g(x) = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = 6 \cdot 3^x$

Lösung 10/1:

Für a gilt: $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Zwei Fälle: Wachstum bzw. negatives Wachstum / Zerfall



Start/Anfangswert: hier jeweils b = 1

Lösung 10/4:

$\log_b a$ heißt: „Logarithmus von a zur Basis b."

$\log_b a$ ist definiert als die Zahl, mit der man b potenzieren muss, um a zu erhalten.

Daher ist $\log_b a$ die Lösung der Gleichung
$b^x = a$ mit $a \geq 0, a \neq 1$ und $b > 0$.

Lösung 10/3:

$$N(t) = 200 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/3}$$

$$N(5) = 200 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5/3} \approx 63 \cdot 10^6$$

Nach fünf Tagen sind noch etwa 63 Millionen Zellen vorhanden.

Lösung 10/6:

$$2{,}5 \cdot 3^x = 5 \cdot 2^x$$
$$\frac{3^x}{2^x} = \frac{5}{2{,}5}$$
$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = 2$$
$$1{,}5^x = 2$$
$$x = \log_{1{,}5} 2 \approx 1{,}71$$

Lösung 10/5:

Für $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\log_a(b^x) = x \cdot \log_a b$$

Lösung 10/8:

Tabelle 1: $8 - 6{,}5 = 1{,}5$; $9{,}5 - 8 = 1{,}5$; $11 - 9{,}5 = 1{,}5$
Lineares Wachstum, da der Bestand in gleichen Zeitintervallen jeweils um 1,5 wächst.

Tabelle 2: $\frac{1{,}25}{2{,}5} = 0{,}5$; $\frac{0{,}625}{1{,}25} = 0{,}5$; $\frac{0{,}3125}{0{,}625} = 0{,}5$
Exponentielle Abnahme, da der Bestand sich mit dem konstantem Wachstumsfaktor 0,5 in gleichen Zeitintervallen verkleinert.

Tabelle 3: $2{,}5 - 1{,}1 = 1{,}4$; $1{,}1 - 0{,}8 = 0{,}3$; $0{,}8 - 0{,}7 = 0{,}1$
$\frac{1{,}1}{2{,}5} = 0{,}44$; $\frac{0{,}8}{1{,}1} \approx 0{,}73$; $\frac{0{,}7}{0{,}8} = 0{,}875$
Weder die Differenz noch der Quotient aufeinanderfolgender y-Werte sind konstant. Es liegt kein lineares und kein exponentielles Wachstum vor.

Lösung 10/7:

Hier: Anwendung der Rechenregel von Karte 10/5

$$8^x = 2^{4x+2}$$
$$\log_2(8^x) = \log_2(2^{4x+2})$$
$$x \cdot \log_2 8 = (4x+2) \cdot \log_2 2$$
$$x \cdot 3 = (4x+2) \cdot 1$$
$$3x = 4x + 2$$
$$-2 = x$$

10/9	**Pfadregeln I**

Aus einer Urne mit zwei weißen und drei schwarzen Kugeln werden nacheinander drei Kugeln **ohne Zurücklegen** gezogen.
Fertige den Baum an und berechne die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

A: „Die erste gezogene Kugel ist weiß.“

B: „Genau zwei der gezogenen Kugeln sind weiß.“

C: „Die zweite gezogene Kugel ist weiß.“

10/10	**Pfadregeln II**

Aus einer Urne mit zwei weißen und drei schwarzen Kugeln werden nacheinander drei Kugeln **mit Zurücklegen** gezogen.
Fertige einen Baum an und berechne die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

A: „Die erste gezogene Kugel ist weiß.“

B: „Genau zwei der gezogenen Kugeln sind weiß.“

C: „Die zweite gezogene Kugel ist weiß.“

10/11	**Kreiszahl π**

Gib den ungefähren Wert der Kreiszahl an und beschreibe kurz zwei Methoden zur näherungsweisen Bestimmung der Kreiszahl.

10/12	**Simulation eines Zufallsexperiments**

Es wird mit einem Tabellenkalkulationsprogramm ein dreifacher Würfelwurf mit 1000-facher Wiederholung simuliert.
Die untersuchte Fragestellung lautet: „Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der drei Zahlen größer als 12 ist.“

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Wurf 1	Wurf 2	Wurf 3	Summe	Summe größer als 12? (ja: 1 / nein: 0)					Anzahl der Summen, die mehr als 12 ergeben:	271
2	6	4	4	14	1					berechnete Wahrscheinlichkeit:	0,271

Gib die passenden Formeln für die Zellen A2, B2, D2, E2 und K1 an.

10/13	**Bogen- und Gradmaß**

Wandle jeweils ins Bogenmaß bzw. ins Gradmaß um.

a) 60°
b) $\frac{\pi}{4}$
c) 50°
d) 5

10/14	**Einheitskreis**

Bestimme mit Hilfe des Einheitskreises jeweils alle reellen Zahlen $x \in]0; 2\pi[$, welche die Gleichung $\cos(x) = -0{,}898$ erfüllen.

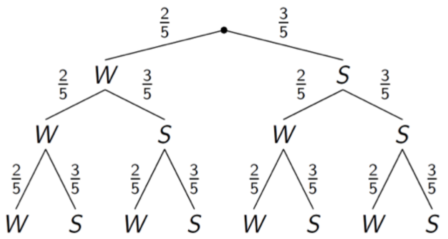
10/15	**Sinus- und Kosinusfunktion**

Zeichne die Graphen G_f und G_g der Funktionen $f: x \mapsto \sin(x)$ und $g: x \mapsto \cos(x)$.
Wie geht G_g aus G_f hervor?

10/16	**Allgemeine Sinusfunktion**

Beschreibe, wie der Graph der allgemeinen Sinusfunktion $f: x \mapsto a\sin\big(b(x+c)\big) + d$ aus dem Graphen der Sinusfunktion $g: x \mapsto \sin(x)$ hervor geht.

Lösung 10/10:

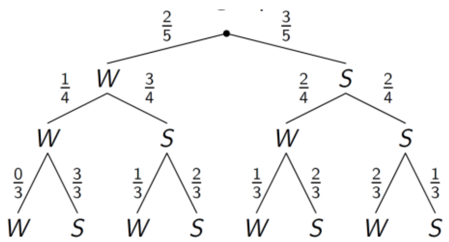


$$P(A) = \frac{2}{5} = 40\%$$

$$P(B) = P(WWS) + P(WSW) + P(SWW) =$$
$$= 3 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = 28{,}8\%$$

$$P(C) = P(WW) + P(SW) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = 40\%$$

Lösung 10/9:



$$P(A) = \frac{2}{5} = 40\%$$

$$P(B) = P(WWS) + P(WSW) + P(SWW) =$$
$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = 30\%$$

$$P(C) = P(WW) + P(SW) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = 40\%$$

Lösung 10/12:

A2 = ZUFALLSBEREICH(1;6)

B2 = ZUFALLSBEREICH(1;6)

D2 = SUMME(A2:C2)

E2 = WENN(D2>12;1;0)

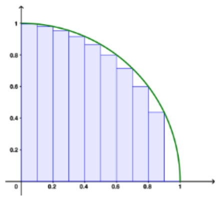
K1 = ZÄHLENWENN(E2:E1001;1)

Lösung 10/11:

π ≈ 3,14

Monte-Carlo-Methode: Sie basiert auf einem Zufallsexperiment. Es werden zufällig Punkte in einem Quadrat mit Kantenlänge 1 gewählt, in dem ein Viertelkreis einbeschrieben ist. Der Quotient aus der Anzahl der Punkte im Viertelkreis und der Gesamtanzahl der Punkte liefert einen Näherungswert für $\frac{\pi}{4}$.

Streifenmethode: Die Fläche eines Viertelkreises wird durch Rechtecke mit gleicher Breite angenähert (s. Abb.).

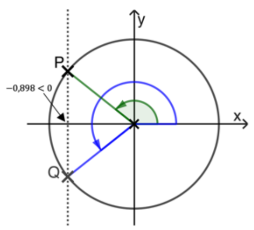


Lösung 10/14:

Für jeden Winkel $x \in [0; 2\pi]$ im Bogenmaß gilt: Jeder Punkt auf dem Einheitskreis hat die Koordinaten $(\cos x \mid \sin x)$.

Stelle den TR auf RAD ein!

1. Skizze im Einheitskreis.
2. Berechne den x-Wert mit dem TR: $x_1 \approx 2{,}686$



Den weiteren x-Wert erhält man so: da $x_1 \approx 2{,}686 < \pi$, gehört x_1 zu P. x_2 gehört zu Q und erhält man mit: $x_2 = 2\pi - x_1 \approx 3{,}597$

Lösung 10/13:

Lösungsidee: $180° \mathrel{\hat{=}} \pi$

Ist α der Winkel im Gradmaß und φ derselbe Winkel im Bogenmaß, so gilt:

$$\frac{\alpha}{180°} = \frac{\varphi}{\pi}$$

a) $\varphi = \frac{60°}{180°}\pi = \frac{\pi}{3}$

b) $\alpha = \frac{\frac{1}{4}\pi}{\pi} \cdot 180° = 45°$

c) $\varphi = \frac{50°}{180°}\pi = \frac{5}{18}\pi$

d) $\alpha = \frac{5}{\pi} \cdot 180° \approx 286{,}5°$

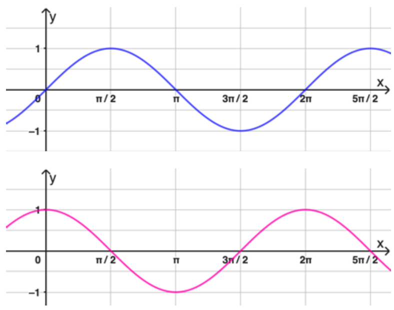
Lösung 10/16:

- *a* bewirkt eine Streckung (|*a*| > 1) bzw. Stauchung (|*a*| < 1) in *y*-Richtung. Die Amplitude ist dann |*a*|. Ist *a* < 0, erfolgt zusätzlich eine Spiegelung an der *x*-Achse.
- *b* verändert die Periode: Neue Periode $\frac{2\pi}{|b|}$
  Dies entspricht einer Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{|b|}$*. Ist b < 0,* erfolgt zusätzlich eine Spiegelung an der *y*-Achse.
- c bewirkt eine Verschiebung in x-Richtung um c nach links (c > 0) bzw. nach rechts (c < 0).
- *d* bewirkt eine Verschiebung in *y*−Richtung nach oben (*d* > 0) bzw. nach unten (*d* < 0).

Lösung 10/15:

Die Kosinuskurve (unten) geht aus der Sinuskurve (oben) durch Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ nach links hervor, daher gilt:

$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$



10/17	**Vorzeichenwechsel**

Bei ganzrationalen Funktionen gibt es zwei Typen von Nullstellen. Gib deren Bezeichnung an und beschreibe jeweils, wie sich der Funktionsgraph in der Umgebung der Nullstelle verhält.

10/18	**Graphen ganzrationaler Funktionen I**

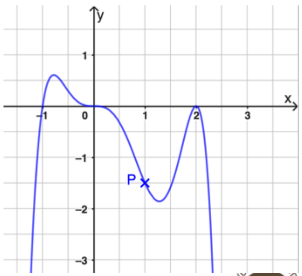
Gib alle Nullstellen mit ihrer Vielfachheit an. Skizziere damit den Verlauf des Graphen der ganzrationalen Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{10} \cdot (x+2) \cdot (x-1)^2 \cdot (x-3)$$

mit $x \in \mathbb{R}$.

10/19	**Graphen ganzrationaler Funktionen II**

Die Abbildung zeigt den Graphen der ganzrationalen Funktion f vom Grad $n < 8$. Dabei liegt der Punkt P(1|-1,5) auf dem Graphen von f. Ermittle einen Funktionsterm der Funktion f.



10/20	**Grober Verlauf**

Beschreibe das Verhalten der Funktionswerte von f für betragsmäßig sehr große x-Werte.

$$f: x \mapsto -7x^5 - 4x^2 + 5$$

Begründe.

10/21	**Biquadratische Gleichung**

Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung

$$x^4 - x^2 - 6 = 0$$

über der Grundmenge $\mathbb{G} = \mathbb{R}$.

10/22	**Symmetrie**

Beschreibe, wie man rechnerisch nachweist, dass der Graph einer Funktion

a) achsensymmetrisch zur y-Achse
b) punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung

ist.

10/23	**Gerade und ungerade ganzrationale Funktionen**

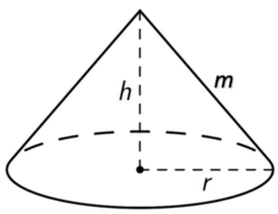
Gib die Bedingung für die Koeffizienten einer ganzrationalen Funktion f mit

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

an, damit die Funktion gerade bzw. ungerade ist.

10/24	**Kegel**

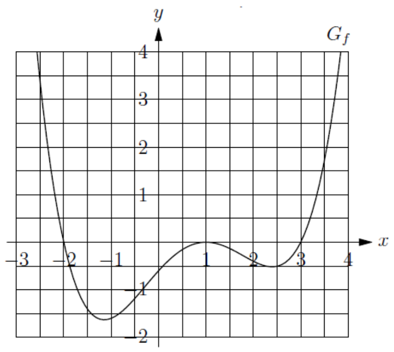
Die Abbildung zeigt einen geraden Kegel.



Gib das Volumen V und die Länge m der Mantellinie in Abhängigkeit von r und h an. Skizziere das Netz.

Lösung 10/18:

$x_1 = -2$ einfache NST; $x_2 = 1$ doppelte NST; $x_3 = 3$ „einfache NST



Lösung 10/17:

Bei Nullstellen ungerader Vielfachheit ergibt sich ein Vorzeichenwechsel der Funktionswerte, bei Nullstellen gerader Vielfachheit ergibt sich kein Vorzeichenwechsel.

Lösung 10/20:

Das Verhalten der Funktionswerte einer ganzrationalen Funktion für betragsmäßig große x-Werte wird durch den Summanden mit dem höchsten vorkommenden Exponenten bestimmt: „Leitkoeffizient“ (hier: -7 < 0) und durch den Grad (hier: 5 ist ungerade).
Daher verläuft G_f von links oben nach rechts unten.

Lösung 10/19:

Die NST sind $x_1 = -1$ einfache NST; $x_2 = 0$ dreifache NST; $x_3 = 2$ doppelte NST.

Ansatz: $f(x) = a \cdot (x+1) \cdot x^3 \cdot (x-2)^2$

Bestimmung von a durch Einsetzen der Koordinaten von P(1|-1,5):

$$-1{,}5 = a \cdot (1+1) \cdot 1^3 \cdot (1-2)^2$$

$$-1{,}5 = a \cdot 2 \quad |:2$$

$$-0{,}75 = a$$

Ergebnis: $f(x) = -0{,}75 \cdot (x+1) \cdot x^3 \cdot (x-2)^2$

Lösung 10/22:

Für alle x $\in \mathbb{R}$ muss gelten:

a) f(-x) = f(x). Die Funktion heißt dann gerade.

b) f(-x) = – f(x). Die Funktion heißt dann ungerade.

Lösung 10/21:

$$x^4 - x^2 - 6 = 0$$

Substitution: $u = x^2$

$$u^2 - u - 6 = 0$$

$$u_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$\Leftrightarrow u_1 = 3$ oder $u_2 = -2$

$x^2 = u$ (Resubstitution)

$x^2 = 3$ oder $x^2 = -2$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$ ($x^2 = -2$ hat keine Lösung)

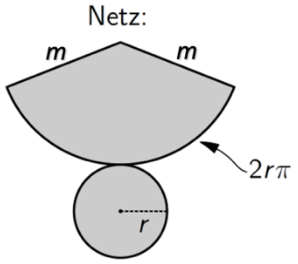
$$\mathbb{L} = \{\pm\sqrt{3}\}$$

Lösung 10/24:

Volumen: $V = \frac{1}{3} r^2 \pi h$

Mantellinie: $m = \sqrt{h^2 + r^2}$ (Satz des Pythagoras)

Netz:



Lösung 10/23:

gerade: $a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0$

ungerade: $a_0 = a_2 = a_4 = \ldots = 0$

beachte: $a_1 x^1 = a_1 x$

und $a_0 x^0 = a_0 \cdot 1 = a_0$

10/25	**Kugel**

Betrachtet wird eine Kugel mit Radius *r*.

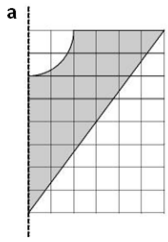
a) Gib das Volumen *V* und den Oberflächeninhalt *A* der Kugel an.

b) Löse die Formeln aus a) jeweils nach *r* auf.

c) Der Radius wird verdoppelt bzw. halbiert. Um wie viel Prozent ändert sich jeweils das Volumen bzw. der Oberflächeninhalt?

10/26	**Rotationskörper**

Die abgebildete Figur rotiert um die Achse *a* und erzeugt so einen Rotationskörper.
Berechne das Volumen *V* und den Oberflächeninhalt *A* des Rotationskörpers.
Zwei Kästchen entsprechen dabei einer Längeneinheit.



Lösung 10/26:

$$V = V_{Kegel} - V_{Halbkugel} =$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(r_{Kegel}\right)^2 h - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi(r_{HK})^3$$

$$= \frac{1}{3}\pi\cdot 3^2\cdot 4 - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3 = \frac{34}{3}\pi$$

Mantellinie: $m = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$$A = A_{Kegelmantel} + A_{Kreisring} + A_{Halbkugel} =$$

$$= 3\cdot 5\cdot\pi + (3^2\pi - 1^2\pi) + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1^2\cdot\pi = 25\pi$$

Lösung 10/25:

a) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $\quad A = 4\pi r^2$

b) $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$ $\quad r = \sqrt{\frac{A}{4\pi}}$

c) $V_{neu} = 8\ V_{alt}$, Vergrößerung um 700% bzw.
$V_{neu} = \frac{1}{8}\ V_{alt} = 0{,}125\ V_{alt}$, Verkleinerung um 87,5 %
$A_{neu} = 4\ A_{alt}$, Vergrößerung um 300% bzw.
$A_{neu} = \frac{1}{4}\ A_{alt}$, Verkleinerung um 75 %