11/1	**Grenzverhalten von Funktionen**

Gib jeweils das Verhalten der Funktion im Unendlichen an, also für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$.

a) $f: x \mapsto 2 - 3^x$

b) $f: x \mapsto 2x^5 - 3x^2 - 10$

c) $f: x \mapsto \left(\frac{1}{3}\right)^x$

d) $f: x \mapsto \cos(2x)$

11/2	**Symmetrie von Funktionsgraphen**

Untersuche jeweils rechnerisch den Funktionsgraphen auf Symmetrie zur y-Achse und zum Koordinatenursprung.

a) $g: x \mapsto \frac{3x-7x^3}{x^2+2}$ mit $D_g = \mathbb{R}$

b) $f: x \mapsto 7x^4 - \cos(5x) + 1$ mit $D_f = \mathbb{R}$

11/3	**Änderungen am Funktionsterm I**

Gegeben ist die Funktion f und ihr Graph G_f. Beschreibe, wie der Graph der Funktion g aus dem Graphen von f hervorgeht, wenn gilt:

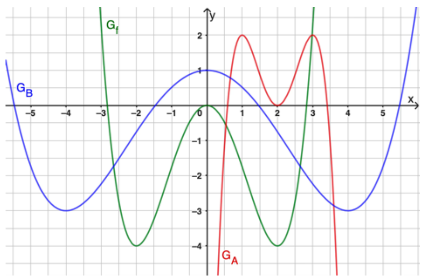
$$g(x) = a \cdot f\big(b \cdot (x + c)\big) + d$$

mit $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $c, d \in \mathbb{R}$.

Beachte dabei das Vorzeichen von a und b sowie die Reihenfolge.

11/4	**Änderungen am Funktionsterm II**

Gegeben ist der Graph G_f der Funktion $f: x \mapsto 0{,}25x^4 - 2x^2$



Beschreibe, wie die Graphen G_A und G_B aus G_f hervorgehen und geben Sie jeweils den zugehörigen Funktionsterm an.

11/5	**Änderungen am Funktionsterm III**

Beschreibe wie der Graph der Funktion $g: x \mapsto 4^{-x-3} + 1$ aus dem Graphen der Funktion $f: x \mapsto 4^x$ hervorgeht.

11/6	**Stetigkeit**

Gegeben ist die Funktion

$$f: x \mapsto \begin{cases} x + 2 & \text{für } x < 1 \\ -(x-1)^2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Skizziere den Graphen von f für $-2 \leq x \leq 2$ in ein Koordinatensystem.

b) Begründe, an welcher Stelle die Funktion nicht stetig ist.

11/7	**Gebrochen-rationale Funktionen I**

Gegeben ist die Funktion f. Bestimme jeweils die maximale Definitionsmenge und alle Nullstellen.

a) $f: x \mapsto \frac{1}{x^2-2} + 1$

b) $f: x \mapsto \frac{x^2-4{,}5x+2}{x^2+1}$

11/8	**Gebrochen-rationale Funktionen II**

Beschreibe, wie das Verhalten im Unendlichen von einer gebrochen-rationalen Funktion f mit $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ vom Grad z des Zählerpolynoms $p(x)$ und vom Grad n des Nennerpolynoms $q(x)$ abhängt.

Lösung 11/2:

a) $g(-x) = \frac{3(-x)-7(-x)^3}{(-x)^2+2} = \frac{-3x+7x^3}{x^2+2} = -\frac{3x-7x^3}{x^2+2} =$
$= -g(x)$
G_g ist also punktsymmetrisch zum Ursprung.

b) $f(-x) = 7(-x)^4 - \cos\big(5\cdot(-x)\big) + 1 =$
$= 7x^4 - \cos(5x) + 1 = f(x)$
G_f ist also achsensymmetrisch zur y-Achse.

Lösung 11/1:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 - 3^x = -\infty;\ \lim\limits_{x\to-\infty} 2 - 3^x = 2;$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^5 - 3x^2 - 10 = +\infty;$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^5 - 3x^2 - 10 = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0;\ \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = +\infty;$

d) Die Funktion divergiert.

Lösung 11/4:

Der Graph G_A geht aus G_f hervor durch:

- Streckung mit dem Faktor 0,5 in y-Richtung
- Spiegelung an der x-Achse
- Streckung mit dem Faktor 0,5 in x-Richtung
- Verschiebung um 2 LE nach rechts

$$f_A(x) = -0{,}5\cdot\ f\big(2(x-2)\big)$$

Der Graph G_B geht aus G_f hervor durch:

- Streckung mit dem Faktor 2 in x-Richtung
- Verschiebung um 1 LE nach oben

$$f_B(x) = f(0{,}5x) + 1$$

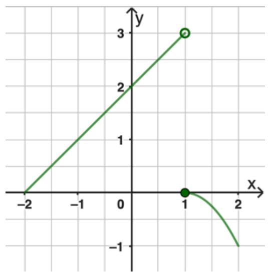
Lösung 11/3:

- a bewirkt eine Streckung mit dem Faktor $|a|$ in y-Richtung. Ist $a < 0$, erfolgt zusätzlich eine Spiegelung an der x-Achse.
- b bewirkt eine Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{|b|}$. Ist $b < 0$, erfolgt zusätzlich eine Spiegelung an der y-Achse.
- c bewirkt eine Verschiebung in x-Richtung um $|c|$ nach links ($c > 0$) bzw. nach rechts ($c < 0$).
- d bewirkt eine Verschiebung in y−Richtung um $|d|$ nach oben ($d > 0$) bzw. nach unten ($d < 0$).
  *Reihenfolge: **S**trecken, **S**piegeln, **V**erschieben*
  bei der Form $y = a\cdot f\big(b\cdot(x+c)\big) + d$

Lösung 11/6:

Da $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x) = 3 \neq 0 = \lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x)$,

ist die Funktion bei
$x = 1$ nicht stetig.



Lösung 11/5:

$$g(x) = 4^{-x-3} + 1 = 4^{-(x+3)} + 1$$

Der Graph von f wird zunächst an der y-Achse gespiegelt. Danach muss er um 3 LE nach links und um 1LE nach oben verschoben werden.

Lösung 11/8:

Fall 1: z < n
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$; waagerechte Asymptote mit der Gleichung $y = 0$ (x-Achse).

Fall 2: z = n
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = k$; waagerechte Asymptote mit der Gleichung $y = k$ und $k \neq 0$. (vgl. Karte 11/9 b)

Fall 3: z = n+1
f divergiert im Unendlichen und der Graph besitzt eine schräge Asymptote.

Fall 4: z > n+1 f divergiert im Unendlichen und der Graph besitzt keine lineare Asymptote.

Lösung 11/7:

a) $x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2$
$x_1 = \sqrt{2};\ x_2 = -\sqrt{2};\Rightarrow D_{max} = \mathbb{R}\backslash\{-\sqrt{2};\ \sqrt{2}\}$
Nullstellen: $\frac{1}{x^2-2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2-2} = -1$
$\Leftrightarrow 1 = -x^2 + 2 \Leftrightarrow x^2 = 1$
$\Rightarrow x_1 = -1;\ x_2 = 1$

b) $D_{max} = \mathbb{R}$, da $x^2 + 1 > 0$
Nullstellen: $x^2 - 4{,}5x + 2 = 0$
$x_{1,2} = \frac{4{,}5\pm\sqrt{(-4{,}5)^2-4\cdot1\cdot2}}{2} = \frac{4{,}5\pm3{,}5}{2}$
$\Rightarrow x_1 = 4;\ x_2 = 0{,}5$

11/9 Gebrochen-rationale Funktionen III

Gib jeweils das Verhalten im Unendlichen der Funktion f an und begründe deine Antwort.

a) $f(x) = \frac{2x}{x^2+3}$

b) $f(x) = \frac{-3x^2+2x+1}{6x^2-4}$

c) $f(x) = \frac{3}{x^2-1} - 2$

11/10 Gebrochen-rationale Funktionen IV

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{4x^2+13x+1}{x+3}$ mit $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-3\}$.
Zeige, dass sich der Funktionsterm $f(x)$ in der Form $f(x) = 4x + 1 - \frac{2}{x+3}$ schreiben lässt und gib alle Asymptoten des Graphen von f an.

11/11 Umgebung von Polstellen

Gib das Verhalten von f in der Umgebung der Definitionslücken und die Art der Polstellen an. Gib die Gleichungen aller Asymptoten an.

a) $f(x) = \frac{4x-5}{x-1}$

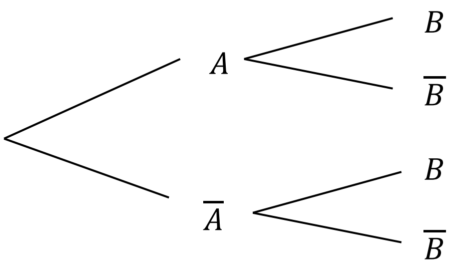
b) $f(x) = \frac{6x+1}{(x+2)^2}$

11/12 Schnittpunkte von Graphen

Gegeben sind die Funktionen f und g mit:
$f(x) = \frac{3x^2-7}{2x-14}$ und $g(x) = \frac{1{,}5x^2+3x}{x-5}$
Gib jeweils die maximale Definitionsmenge an und bestimme den Schnittpunkt der Graphen von f und g.

11/13 Baumdiagramm

Wie berechnet man eine bedingte Wahrscheinlichkeit? Beschrifte das Baumdiagramm.



11/14 Bedingte Wahrscheinlichkeit

In einem Betrieb sind 60% Männer beschäftigt. Zehn Prozent der Betriebsangehörigen sind Raucher. 15% der weiblichen Betriebsangehörigen sind Raucher.

a) Berechne den Anteil der weiblichen Raucher unter den Betriebsangehörigen.

b) Bestimme, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein beliebig herausgegriffener Betriebsangehöriger
   α) weiblich ist, wenn sie raucht.
   β) männlich ist, wenn er raucht.
   γ) Raucher ist, falls er männlich ist.

11/15 Stochastische Unabhängigkeit

In einer Lostrommel sind 80% der Lose Nieten, 40% sind rot gefärbt und 5% sind rot und keine Nieten. Ein Los wird gezogen.

a) Erstelle die zugehörige Vierfeldertafel.
b) Untersuche, ob die Ereignisse N und $\bar{R}$ stochastisch unabhängig sind.

11/16 Begriffe für Wahrscheinlichkeiten

Bei einem zusammengesetzten Zufallsexperiment sind A und B zwei Ereignisse.
Erkläre jeweils die Wahrscheinlichkeit (WSK):
P(A) ist die WSK für …
P(A∩B) ist die WSK für …
P(A∪B) ist die WSK für …

Lösung 11/10:

$$f(x) = 4x + 1 - \frac{2}{x+3} = \frac{(4x+1)\cdot(x+3) - 2}{x+3}$$

$$= \frac{4x^2 + 12x + x + 3 - 2}{x+3} = \frac{4x^2 + 13x + 1}{x+3}$$

schräge Asymptote mit der Gleichung $y = 4x + 1$
senkrechte Asymptote mit der Gleichung $x = -3$

Lösung 11/9:

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x^2+3} = 0$, da der Grad z = 1 des Zählerpolynoms kleiner als der Grad n = 2 des Nennerpolynoms ist.

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-3x^2+2x+1}{6x^2-4} = \frac{-3}{6} = -0{,}5$, da der Grad z=2 des Zählerpolynoms mit dem Grad n=2 des Nennerpolynoms übereinstimmt.

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3}{x^2-1} - 2 = -2$

da $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3}{x^2-1} = 0$ wegen z < n.

Lösung 11/12:

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{7\}$ und $D_g = \mathbb{R}\setminus\{5\}$

$$\frac{3x^2 - 7}{2x - 14} = \frac{1{,}5x^2 + 3x}{x - 5}$$

$$(3x^2 - 7)\cdot(x - 5) = (1{,}5x^2 + 3x)\cdot(2x - 14)$$

$$3x^3 - 15x^2 - 7x + 35 = 3x^3 - 21x^2 + 6x^2 - 42x$$

$$-7x + 35 = -42x$$

$$35 = -35x$$

$$x = -1$$

$f(-1) = 0{,}25 \Longrightarrow$ Schnittpunkt $(-1|0{,}25)$

Lösung 11/11:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{4x-5}{x-1} = +\infty$; $\quad \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{4x-5}{x-1} = -\infty$;

⇒ Polstelle mit Vorzeichenwechsel
senkrechte Asymptote: $x = 1$
waagerechte Asymptote: $y = 4$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ <}} \frac{6x+1}{(x+2)^2} = -\infty$; $\quad \lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} \frac{6x+1}{(x+2)^2} = -\infty$;

⇒ Polstelle ohne Vorzeichenwechsel
senkrechte Asymptote: $x = -2$
waagerechte Asymptote: $y = 0$

Lösung 11/14:

R:„rauchender Betriebsangehöriger
W:„weiblicher Betriebsangehöriger

a) $P(W \cap R) = P(W)\cdot P_W(R) = 0{,}4 \cdot 0{,}15 = 0{,}06 = 6\%$

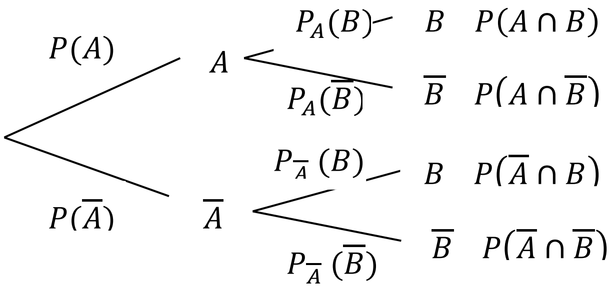
b) $\alpha)$ $P_R(W) = \frac{P(W\cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}06}{0{,}1} = 60\%$

$\beta)$ $P_R(M) = 1 - P_R(W) = 1 - 60\% = 40\%$

$\gamma)$ $P_M(R) = \frac{P(M\cap R)}{P(M)} = \frac{0{,}04}{0{,}6} \approx 6{,}7\%$

Lösung 11/13:

Berechnung: $P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$



Lösung 11/16:

P(A) ist die WSK dafür, dass das Ereignis A eintritt.

P(A∩B) ist die WSK dafür, dass die Ereignisse A und B eintreten.

P(A∪B) ist die WSK dafür, dass das Ereignis A oder B eintritt.
(Unterscheide das „oder“ und das „entweder oder“.)

Lösung 11/15:

	R	$\overline{R}$	
N	0,35	0,45	0,80
$\overline{N}$	0,05	0,15	0,20
	0,40	0,60	1

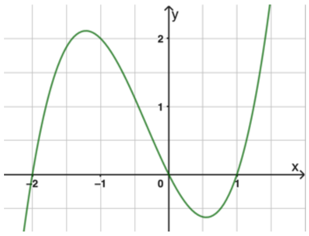
$$P(N \cap \overline{R}) = 0{,}45$$

$$P(N)\cdot P(\overline{R}) = 0{,}80 \cdot 0{,}60 = 0{,}48$$

Die Ereignisse sind stochastisch abhängig,
da $0{,}45 \neq 0{,}48$ gilt.

11/17	**Mittlere Änderungsrate**

a) Bestimme anhand des Graphen der Funktion f die mittlere Änderungsrate bzw. den Wert des Differenzenquotienten im Intervall [-2; -1].



b) Gib die graphische Bedeutung der mittleren Änderungsrate aus a) an.

11/18	**Lokale Änderungsrate**

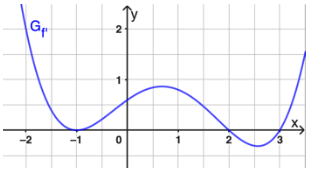
Beschreibe, wie man graphisch den Wert des Differentialquotienten (oder lokale/momentane Änderungsrate) einer Funktion f an der Stelle x_p bestimmt.

11/19	**Differenzierbarkeit**

Zeichne den Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion, die an der Stelle x = 2 nicht differenzierbar aber stetig ist.

11/20	**Graph der Ableitungsfunktion**

Der Graph der ersten Ableitung f' einer Funktion f ist gegeben. Begründe jeweils, ob die Aussage wahr oder falsch ist.



a) Der Graph von f ist im Intervall $[0;1]$streng monoton steigend.
b) Der Graph von f besitzt bei $x = 2$ einen Tiefpunkt.
c) Der Graph von f ist im Intervall $[-2\,;-1{,}5]$ linksgekrümmt.

11/21	**Ableitungsfunktion**

Bestimme jeweils den Term der ersten Ableitung der Funktion f.

a) $f(x) = x^4 - 2$
b) $f(x) = 3x^3 - 4x + 5$
c) $f(x) = (x + 2)^2$

11/22	**Krümmung**

Beschreibe, wie man mit Hilfe der zweiten Ableitung eine Aussage über die Krümmung des Graphen machen kann.

11/23	**Extrempunkte**

Berechnen Sie Lage und Art aller Extrempunkte der Funktion

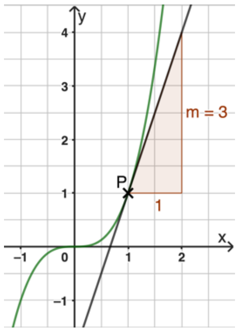
$f: x \mapsto -\frac{1}{12}x^3 - 0{,}5x^2 - \frac{3}{4}x.$

11/24	**Gleichung der Tangente**

Bestimme rechnerisch die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $f: x \mapsto x^3 - 3x^2 + 4$ im Punkt $P\big(1\big|f(1)\big)$ und die Größe des Steigungswinkels der Tangente.

Lösung 11/18:

Man zeichnet die Tangente an den Punkt $P(x_P|f(x_P))$ ein. Die Steigung der Tangente ist der Wert des Differentialquotienten.



Lösung 11/17:

a) $\frac{f(-1)-f(-2)}{-1-(-2)} = \frac{2-0}{-1+2} = 2$

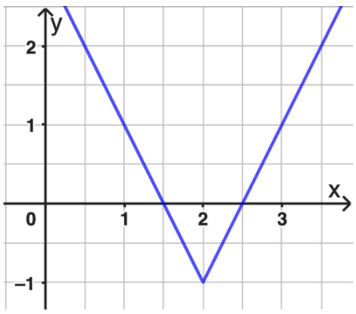
b) Steigung der Sekanten durch die Punkte $(-2|f(-2))$ und $(-1|f(-1))$.

Lösung 11/20:

a) Wahr, da $f'(x) > 0$ für alle $x \in [0;1]$.
b) Falsch, da der Graph von f' dort keine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von – nach + besitzt. Es liegt also ein Tiefpunkt vor.
c) Falsch, da der Graph von f' im Intervall $[-2\,;-1{,}5]$ streng monoton fallend ist und der Graph von f damit rechtsgekrümmt ist.

Lösung 11/19:

individuelle Lösung, z.B.



Lösung 11/22:

- Wenn $f''(x) < 0$ für alle x in einem Intervall I gilt, dann ist dort der Graph von f rechtsgekrümmt.
- Wenn $f''(x) > 0$ für alle x in einem Intervall I gilt, dann ist dort der Graph von f linksgekrümmt.

Lösung 11/21:

a) $f'(x) = 4x^3$

b) $f'(x) = 9x^2 - 4$

c) $f(x) = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$

$f'(x) = 2x + 4$

Lösung 11/24:

(1) Steigung der Tangente:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \Longrightarrow f'(1) = -3$$
$$\Longrightarrow y = -3x + t$$

(2) Koordinaten von P einsetzen:

$$f(1) = 2$$
$$\Longrightarrow 2 = -3 \cdot 1 + t$$
$$\Longrightarrow t = 5$$

(3) Gleichung der Tangente:

$$y = -3x + 5$$

(4) Steigungswinkel: $m = \tan\alpha = -3$

$$\Longrightarrow \alpha \approx -72°$$

Lösung 11/23:

Lage der Extrempunkte:

$$f'(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x - \frac{3}{4} = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot(-0{,}25)\cdot(-0{,}75)}}{-0{,}5} = \frac{1 \pm 0{,}5}{-0{,}5}$$

$\Rightarrow x_1 = -3;\; x_2 = -1$

$\Rightarrow f(-3) = 0$ und $f(-1) = \frac{1}{3}$

Art der Extrempunkte:

$$f''(x) = -0{,}5x - 1$$

$f''(-3) = 0{,}5 > 0 \;\Rightarrow$ Tiefpunkt $(-3|0)$

$f''(-1) = -0{,}5 < 0 \;\Rightarrow$ Hochpunkt $\left(-1|\frac{1}{3}\right)$

11/25 Monotonieintervalle

Gegeben ist die Funktion

$f\colon x \mapsto -\frac{1}{12}x^4 - 0{,}5x^3$.

Bestimme rechnerisch die Intervalle, in denen die Funktion f streng monoton zunehmend bzw. streng monoton abnehmend ist.

11/26 Wendepunkt

Gegeben ist die Funktionenschar

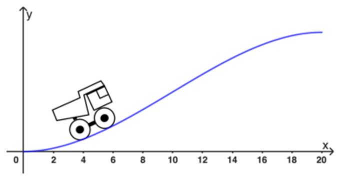
$f_k\colon x \mapsto 0{,}5x^3 - kx^2 + 2$ mit $k \in \mathbb{R}$.

a) Berechne die Koordinaten des Wendepunkts in Abhängigkeit von k.

b) Bestimme, für welchen Wert von k der Wendepunkt ein Terrassenpunkt ist.

11/27 Anwendungsaufgabe

Ein Muldenkipper soll im Steinbruch einen Hang hinauffahren. Das Höhenprofil des Hangs beschreibt der Graph der



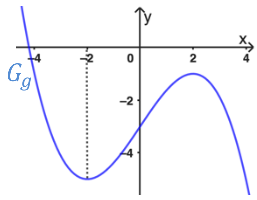
Funktion $f\colon x \mapsto -\frac{1}{1000}x^2 \cdot (x - 30)$ für $x \in [0; 20]$.
Der Muldenkipper kann maximal eine Steigung von 28% bewältigen. Überprüfe rechnerisch, ob der Muldenkipper den Hang befahren darf.

11/28 Newton-Verfahren

Ein Näherungswert für die Nullstelle der Funktion

$g\colon x \mapsto -\frac{1}{8}x^3 + 1{,}5x - 3$

soll ermittelt werden.



a) Führe dazu zwei Schritte des Newton-Verfahrens mit dem Startwert $x_0 = -3{,}5$ durch.

b) Begründe mit der Abbildung, warum $x = -2$ als Startwert nicht geeignet ist.

Lösung 11/26:

a) $f_k'(x) = 1{,}5x^2 - 2kx$

$$f_k''(x) = 3x - 2k = 0$$

$$\Rightarrow x_{WP} = \frac{2}{3}k$$

$f_k'''(x) = 3 \neq 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}k$ ist eine Wendestelle.

Wendepunkt: $\left(\frac{2}{3}k \,|\, 2 - \frac{8}{27}k^3\right)$

b) Der Wendepunkt ist ein Terrassenpunkt, wenn zusätzlich gilt: $f_k'(x_{WP}) = 0$

$$f_k'\left(\frac{2}{3}k\right) = 1{,}5 \cdot \left(\frac{2}{3}k\right)^2 - 2k \cdot \frac{2}{3}k = -\frac{2}{3}k^2$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{3}k^2 = 0 \quad \Rightarrow k = 0$$

Lösung 11/25:

$$f'(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 1{,}5x^2 = 0$$

$$x^2\left(-\frac{1}{3}x - 1{,}5\right) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0;\; x_2 = -4{,}5$$

x	x < - 4,5	x = - 4,5	-4,5 < x < 0	x = 0	0 < x
f'(x)	+	0	-	0	-

f ist streng monoton zunehmend für $x \in]-\infty; -4{,}5]$.
f ist streng monoton abnehmend für $x \in [-4{,}5; +\infty[$.

Lösung 11/28:

a) $$x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{-\frac{1}{8}x_0^3 + 1{,}5x_0 - 3}{-\frac{3}{8}x_0^2 + 1{,}5}$$

$$x_1 = -\frac{439}{99} \approx 4{,}43$$

$$x_2 \approx -4{,}22$$

b) Dort gilt: $g'(-2) = 0$. Die Tangente hat keinen Schnittpunkt mit der x-Achse. Newton-Verfahren ist nicht möglich.

Lösung 11/27:

Punkt mit extremaler Steigung: Wendepunkt

$$f(x) = -\frac{1}{1000}(x^3 - 30x^2)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{1000}(3x^2 - 60x)$$

$$f''(x) = -\frac{1}{1000}(6x - 60) = 0 \qquad \Rightarrow x = 10$$

Wegen $f'''(x) = -\frac{3}{500} < 0$ für $x = 10$ ist die Steigung maximal groß und beträgt: $f'(10) = 0{,}3$.

Wegen $0{,}3 > 0{,}28$ darf der Muldenkipper den Hang nicht befahren.